Первая попытка. Задачи 10-11 класса

Задача I.2.2.1. (10 баллов)

Предположим, что мы разматываем нить вдоль экватора Земли, а потом делаем то же самое, но в метре от экватора. Представим теперь, что мы разматываем один клубок вдоль поверхности Солнца и в метре от его поверхности, а второй – вдоль экватора Земли и в метре от его поверхности. К какому клубку нужно добавить больше ниток?

1. К тому, что мы разматываем в метре от Солнца
2. Одинаково
3. К тому, что мы разматываем в метре от Земли

Укажите ответ одним словом.

Решение

Длина окружности вычисляется по формуле $l = 2\pi R$, где R – радиус окружности. Если радиус увеличить на 1м, то длина дуги будет равна $L = 2\pi(R+1) = 2\pi R + 2\pi$, следовательно, не зависимо от радиуса, длина дуги в обоих случаях увеличится на одну и ту же величину: 2π, то есть примерно на 6 м.

Ответ: Одинаково.

Задача I.2.2.2. (10 баллов)

Девять айтишников вошли в лифт на первом уровне одиннадцатиэтажного дворца техники. Если на одном из уровней вышли два человека, на другом – три, и еще на одном – четыре, то сколькими способами пассажиры могли выйти из лифта?

Решение

Распределить три группы на выход на трех уровнях из 10 можно $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!}$ способами. Число перестановок из 9 человек с повторениями или число разбиений группы из девяти на три группы по 2,3 и 4 человека равно $N_9(2,3,4) = \frac{9!}{2!3!4!}$. Итого: $A_{10}^3 N_9(2,3,4) = \frac{10!}{4} = 907200$.

Ответ: 907200.

Задача I.2.2.3. (10 баллов)

Вычислите: $\cos 36° - \sin 18°$.

Решение

Разделим и умножим данное выражение на одно и то же, не равное нулю, число, затем вопспользуемся формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{\cos 36^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} =$$
$$= \frac{0,5\cos 18^\circ + 0,5\cos 54^\circ - 0,5\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{0,5\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 0,5$$

Ответ: 0,5.

Задача I.2.2.4. (10 баллов)

Компьютер последовательно решает несколько задач. Было замечено, что на решение каждой следующей задачи компьютер тратил в одно и то же число раз меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач, и сколько времени затрачено машиной на решение всех задач, если на решение всех задач, кроме первой, затрачено 63,5 мин.; на решение всех задач, кроме последней, затрачено 127 мин.; а на решение всех задач, кроме двух первых и двух последних, затрачено 30 мин?

Напишите ответ в формате: X задач(и), Y мин

Решение

Пусть b_i – время, затрачиваемое машиной на решение i-ой задачи – образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $0 < q < 1$, то есть $b_i = b_1 q^{i-1}$. Тогда

$$b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n = 63,5,$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} = 127,$$
$$b_3 + b_4 + \dots + b_{n-2} = 30.$$

Анализируя цифры, видим, что q может быть только $\frac{1}{2}$. Рассмотрим третье равенство с разным количеством членов. Если в нем только один член $b_3 = 30$, тогда $b_1 q^2 = 30$, $b_1 = 120$, и мы имеем ряд $120+60+30+15+7,5$, не удовлетворяющий второму условию. Если в третьем уравнении два члена: $b_3+b_4 = 30$, то $b_1 q^2(1+q) = 30$, и подставляя $q = \frac{1}{2}$, находим $b_1 = 80$. В таком случае имеем ряд 80+40+20+10+5+2,5, который опять не удовлетворяет второму уравнению. Если в третьем уравнении три члена: $b_3+b_4+b_5 = 30$, то из уравнения $b_1 q^2(1+q+q^2) = 30$ находим $b_1 = 30 \cdot 4 \cdot 4/7$ – не целое число, что не возможно. И наконец, если в третьем уравнении 4 члена: $b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 30$, то $b_1 = 64$, и получаем ряд $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 0,5$, который удовлетворяет всем условиям. Сумма этого ряда 127,5 мин.

Ответ: 8, 127,5.

Задача I.2.2.5. (10 баллов)

4 раза в сутки с интервалом 6 часов в порту с. Никольское (Камчатка) измеряют уровень воды. Со временем обнаружили, что колебания уровня воды приблизительно задаются уравнением

$$h = 1,4 - 0,8sin(0,3t)$$

Вопрос 1. Найдите высоту прилива через 15 часов с начала измерений.
Вопрос 2. В какое время ожидался самый высокий уровень воды в первые сутки с округлением до часов?

Решение

Вопрос 1. Для решения подставим значение $t = 15$ в формулу и проведем вычисления, считая значение синуса в радианах.

$$h = 1,4 - 0,8sin(0,3 \cdot 15)$$

$$h = 1,4 - 0,8 \cdot (-0,978)$$

$$h = 2,18m$$

Ответ: $h = 2,18m$.

Вопрос 2. Для поиска самого высокого уровня воды нужно вычислить экстремумы функции $h = 1,4 - 0,8sin(0,3t)$ для $t \in [0; 24]$и определить точку максимума.

Известно, что в точках экстремума производная функции равна нулю, а при переходе через точку максимума знак производной меняется с положительного на отрицательный. Будем искать решение по шагам.

1. Найдем производную функции

$$h\prime = 1,4\prime - (0,8sin(0,3t))\prime$$

$$h\prime = -0,8(sin(0,3t))\prime$$

$$h\prime = -0,8cos(0,3t) \cdot (0,3t)\prime$$

$$h\prime = -0,8cos(0,3t) \cdot 0,3$$

$$h\prime = -2,4cos(0,3t)$$

2. Приравняем производную к нулю и решим полученное тригонометрическое уравнение

$$-2,4cos(0,3t) = 0$$

$$cos(0,3t) = 0$$

$$0,3t = \pm arccos(0) + 2\pi n$$

$$0,3t = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$t = 1,67\pi + 3,33\pi n$$

Вычислим, при каких значениях n $t \in [0; 24]$, получим два значения: $t_1 = 5,34$ и $t_2 = 15,79$

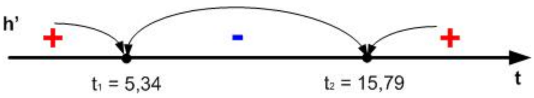

Рис. I.2.1: Знаки производной на промежутках

Отметим значения t_i на числовой прямой и проверим знаки производной на полученных промежутках (см. рис. I.2.1)

Ответ: 2,18, 16:00.

Задача I.2.2.6. (10 баллов)

К конгрессу математиков было принято решение оформить клумбу цветами разных видов так, как показано на рисунке I.2.2. Для заполнения треугольника ABC было использовано 72 цветка. Сколько цветков при той же плотности посадки понадобится для заполнения четырехугольника $BCDE$, если стороны AB и AC равны, соответственно, 9 и 8 метров, а диаметр круга равен 10 метрам. Отрезок AD проходит в точности через центр круга.

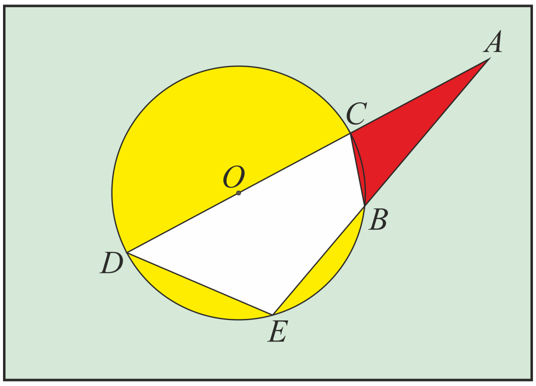

Рис. I.2.2: Чертёж клумбы

Решение

Произведения отрезков секущих, проведенных из общей точки, равны: $AC \cdot AD = AB \cdot AE$, а угол $\angle A$ является общим углом треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$. Соответственно, данные треугольники подобны. Коэффициент подобия равен отношению сторон AD и AB: $k = \frac{AD}{AB} = \frac{(8+10)}{9} = 2$, т.к. отрезок DC совпадает с диаметром круга. Значит, площади треугольников $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$ соотносятся как квадрат коэффициента подобия: $S_{\triangle ADE} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ABC}$.

Далее имеем: $S_{BCDE} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ABC}$

Так как плотность посадки цветов одинаковая, то для заполнения четырехугольника $BCDE$ необходимо $N = 3 \cdot 72 = 216$ цветков.

Ответ: 216 цветков.

Задача I.2.2.7. (10 баллов)

Дизайнер в известной компании придумал новый продукт для поддержания имиджа – термос-кружку с логотипом компании. Внутренняя поверхность термоса имеет форму прямого усеченного конуса с диаметрами нижнего и верхнего оснований 10 см и 8 см соответственно. В нижней части поверхность завершается шаровым сегментом высотой 2 см. Определите высоту термоса от макушки шарового сегмента до верхнего основания конуса, чтобы в него помещалась жидкость объемом 0,7 литра.

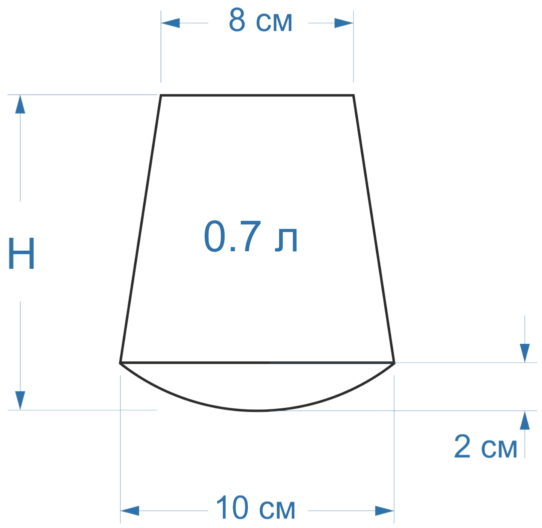

Рис. I.2.3: Схема внутренней поверхности термоса

Решение

Представим схему внутренней поверхности термоса, как показано на рисунке. H на рисунке I.2.3 - высота, которую нужно найти.

Для рассчета объема шарового сегмента все исходные данные в задаче имеются $V_1 = \frac{1}{6}\pi h_1(h_1^2 + 3r_{bot}^2) = \frac{1}{6}\pi 2(2^2 + 3 \cdot 5^2) = \frac{79}{3}\pi$. Объем усеченного конуса определяется выражением $V_2 = \frac{1}{3}h_2\pi(r_{bot}^2 + r_{bot} \cdot r_{top} + r_{top}^2) = \frac{1}{3}h_2\pi(5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2) = \frac{61}{3}h_2\pi$. Общий объем термоса складывается из объема шарового сегмента и усеченного конуса $V = V_1 + V_2$. Подставим в эту формулу выражения для объемов шарового сегмента и конуса, а затем выразим высоту конуса через известный из условия задачи объем термоса, получим $h_2 = \frac{3(700 - \frac{79\pi}{3})}{61\pi} \approx 9.66$. Следовательно искомая высота термоса будет равна $H \approx 2 + 9.66 = 11.66$ см.

Ответ: 11.66 см.

Задача I.2.2.8. (10 баллов)

Известная строительная компания выпускает универсальные комплектующие для сооружения легких каркасных конструкций типа «пирамида». Отдельный элемент конструкции имеет форму равнобедренного треугольника с углом между боковыми сторонами 15 градусов. При монтаже конструкции треугольники соединяются попарно своими боковыми сторонами. Высота конструкции, составленной из 8 таких элементов, равна 4 метра. Какова будет высота конструкции, если количество элементов уменьшить до 3?

Решение

Согласно условию задачи, конструкция представляет собой правильную пирамиду в основании, которой лежит восьмиугольник.

Рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный высотой пирамиды и высотой ее боковой стороны. Высоты пирамиды H и боковой грани h являются соответственно катетом и гипотенузой данного треугольника. Второй его катет можно выразить через длину основания боковой грани пирамиды a, пользуясь тем, что основанием пирамиды является правильный восьмиугольник: $OO' = a(\frac{1}{2} + \sqrt{2})$. По теореме Пифагора $OO'^2 + H^2 = h^2$. Комбинируя два эти выражения, получим соотношение между высотами и длиной основания $a^2(\frac{1}{2} + \sqrt{2})'^2 + H^2 = h^2$

Боковая грань пирамиды является равнобедренным треугольником. Его высоту можно выразить через длину основания и угол при боковых сторонах $h = \frac{a}{2\tan\frac{\phi}{2}}$. Подставляя данное выражение в предыдущее уравнение получим для длины основания $a = \frac{H}{\sqrt{\frac{1}{4\tan^2\frac{\phi}{2}} - (\frac{1}{2}+\sqrt{2})^2}}$, вычисляя которое, имеем $a \approx 1.22$ метра. Соответственно найдем $h \approx 4.63$ метра.

Теперь рассмотрим пирамиду, в основании которой лежит правильный треугольник. В прямоугольном треугольнике образованном высотами пирамиды H_1 и боковой грани h, катет в плоскости основания пирамиды равен $OO' = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Соотношение между высотами и длиной основания боковой грани запишем в виде $\frac{a^2}{12} + H_1^2 = h^2$, из которого найдем $H_1 \approx 4.62$ метра.

Ответ: 4.21 метра.

Задача I.2.2.9. (10 баллов)

Количество пользователей системы «Умный дом», выпущенной компанией «Технологии будущего», росло в течение всего года. На четыре разных квартала (в каком-то порядке) пришлись: наибольший абсолютный прирост, наименьший абсолютный прирост, наибольший относительный прирост и наименьший относительный прирост. (Абсолютный прирост – разность между новым и старым значением величины. Относительный прирост – это абсолютный прирост, делённый на старое значение.)

Известно, что наименьший относительный прирост был раньше, чем наибольший относительный. В каком квартале был наибольший абсолютный прирост? В ответ укажите номер квартала.

Решение

Способ 1. Докажем, что если количество пользователей растет и относительный прирост увеличивается, то увеличивается и абсолютный прирост. Пусть A и B – количество пользователей в какие-то моменты времени, причем $A < B$, а абсолютный прирост составляет x и y человек соответственно. Тогда относительный прирост равен соответственно $\frac{x}{A}$ и $\frac{y}{B}$. Если $\frac{x}{A} < \frac{y}{B}$, то $Bx < Ay < By$, следовательно, $x < y$.

Таким образом, наибольший относительный прирост не мог быть позже, чем наибольший абсолютный, и потому был не позже третьего квартала. Аналогично, наименьший относительный прирост не мог быть раньше, чем наименьший абсолютный прирост, и потому был не раньше второго квартала. Так как по условию задачи, наименьший относительный прирост был раньше, чем наибольший относительный, то они были во втором и третьем квартале соответственно. Следовательно, наибольший абсолютный прирост был позже, то есть в четвертом квартале.

Способ 2. Количество пользователей растет. Значит, если относительный прирост остается постоянным, то в следующем квартале он отсчитывается от большего значения, поэтому ему отвечает больший абсолютный прирост. Если же относительный прирост возрастает, то абсолютный прирост тем более возрастает.

Ответ: 4.

Задача I.2.2.10. (10 баллов)

Имеется информационная сеть, состоящая из центров хранения информации. Некоторые пары центров соединены каналами связи. Обмен информацией между любыми двумя центрами выполняется либо непосредственно, либо через другие каналы и центры. Если каждая пара центров может обмениваться информацией, сеть является исправной.

Известно, что в сети всего $n = 12$ центров, каждый из центров непосредственно связан каналом с $k = 7$ другими центрами.

Какое наименьшее количество центров надо разрушить, чтобы сеть стала неисправной?

Решение

Информационной сети следует сопоставить граф G: верршины графа - это центры сети, ребра - каналы связи. Если сеть исправна, то ей соответствует связный граф. Разрушить сеть можно или удалением вершин (разрушением центров) или удалением ребер (повреждением каналов). В результате любого из выбранных способов должен получиться несвязный граф. В данной сети минимальная степень вершины $\delta(G) = 7$. Известно, что для графа, не являющегося полным и имеющего n вершин выполняется неравенство:

$$k(G) \geqslant 2\delta(G) - n + 2,$$

где $k(G)$ - связность графа G.

Подставим в формулу данные о нашей сети

$$k(G) \geqslant 2 \cdot 7 - 12 + 2$$

$$k(G) \geqslant 4$$

Из последнего неравенства следует, что если удалить из сети минимально возможное количество центров, равное 4, граф распадется на несвязные области.

Ответ: 4.

Вторая попытка. Задачи 10-11 класса

Задача I.2.4.1. (10 баллов)

IT-специалист в первую неделю отпуска израсходовал менее, чем $3/5$ количества взятых с собой денег, во вторую неделю – $1/4$ остатка и еще 3000 руб., в третью неделю – $2/5$ нового остатка и еще 1200 руб. После чего осталось $6/35$ от количества взятых денег. Известно также, что количество денег, оставшихся неизрасходованными к концу первой, второй и третьей недели убывало в арифметической прогрессии.

Сколько денег было израсходовано в три недели отпуска?

Ответ укажите в рублях.

Решение

Обозначим за x общее количество взятых с собой денег, за y – остаток первой недели, а за d – разность арифметической прогрессии. Заполним таблицу:

неделя	израсходовано	остаток	арифметическая прогрессия
1 нед	$< \frac{3}{5}x$	$y > \frac{2}{5}x$	$\frac{6}{35}x + 2d$
2 нед	$\frac{1}{4}y + 30$	$\frac{3}{4}y - 30$	$\frac{6}{35}x + d$
3 нед	$\frac{2}{5}(\frac{3}{4}y - 30) + 12$	$\frac{3}{4}y - 30 - \frac{3}{10}y$	$\frac{6}{35}x$

Приравняем второй и третий столбцы таблицы, и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{6}{35}x + 2d, \\ \frac{3}{4}y - 30 = \frac{6}{35}x + d, \\ \frac{3}{4}y - 30 - \frac{3}{10}y = \frac{6}{35}x. \end{cases}$$

Решив систему, получаем $d = 180, y = 600, x = 1400$. Таким образом, за отпуск потрачено $x - \frac{6}{35}x = 1160$ тыс. рублей.

Ответ: 116000 руб.

Задача I.2.4.2. (10 баллов)

В некотором городе стоит дворец техники. На этажах со 2 по 8 включительно располагаются экспонаты выставок. Посетители заходят во дворец на 1 этаже, сдают одежду в гардероб и проходят в холл к лифтам.

В один из моментов на 1 этаже в лифт зашло 7 посетителей. Они поехали наверх к экспонатам. Какова вероятность, что хотя бы на одном уровне вышли по крайней мере два человека?

Решение

Рассмотрим обратную ситуацию: на каждом уровне вышло по одному человеку. Вероятность этого события $P(\bar{A}) = \frac{7!}{7^7} = 0,00612$. Следовательно, вероятность обратного события $P(A) = 1 - 0,00612 = 0,99388$.

Ответ: 0,994. (0,99388).

Задача I.2.4.3. (10 баллов)

Решите уравнение: $\cos\sqrt{x} + \sqrt{\cos x} = 2$.

Решение

Так как $|\cos\sqrt{x}| \leqslant 1$ и $|\sqrt{\cos x}| \leqslant 1$, то уравнение $\cos\sqrt{x}+\sqrt{\cos x} = 2$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos\sqrt{x} = 1, \\ \sqrt{\cos x} = 1. \end{cases}$$

Из певрого уравнения системы получим, что $x = 2\pi k$, где $k \in Z$, а из второго уравнения получим, что $\sqrt{x} = 2\pi n \Leftrightarrow x = 4\pi^2 n^2$, где $n \in Z$, $n \geqslant 0$. Найдем пересечение полученных множеств: $2\pi k = 4\pi^2 n^2 \Leftrightarrow k = 2\pi n^2$. Так как π - иррациональное число, то последнее равенство выполяется тогда, и только тогда, когда $n = k = 0$. Следовательно, единственным решением данного уравнения является $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Задача I.2.4.4. (10 баллов)

Две рамки квадратная и в форме равностороннего треугольника заполнены одинаковым количеством одинаковых шаров, касающихся друг друга и сторон рамок (рамки заполнены, как в бильярде).

Сколько шаров для этого потребуется, если к стороне треугольника примыкает на 14 шаров больше, чем к стороне квадрата?

Решение

Пусть a – количество шаров вдоль стороны квадрата, тогда в сосуде с квадратным дном a^2 шаров. И пусть n – количество шаров вдоль стороны треугольника, тогда в сосуде с треугольным дном будет $1+2+...+n$ шаров. По условию количество шаров в обоих сосудах одинаково, то есть $a^2 = 1+2+...+n$. Сумма арифметической прогрессии в правой части равна $\frac{(1+n)n}{2}$. В левой части воспользуемся условием, что $a = n - 14$. Получим уравнение: $(n-14)^2 = \frac{(1+n)n}{2}$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получим квадратное уравнение $n^2 - 57n + 392 = 0$. Оно имеет два корня: $n = 8$ и $n = 49$, первый из которых не подходит по условию $a = n - 14 > 0$. Для второго корня $a = n - 14 = 35$, следовательно всего шаров в каждом из сосудов $35^2 = 1225$.

Ответ: 2450.

Задача I.2.4.5. (10 баллов)

Какую геометрическую фигуру представляют собой множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $|z| = 1$?

Ответом служит одно слово в именительном падеже.

Решение

Модуль комплексного числа $z = x + yi$ равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. По условию он равен 1: $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, следовательно, $x^2 + y^2 = 1$. Это окружность в комплексной плоскости радиуса 1 с центром в начале координат.

Ответ: Окружность.

Задача I.2.4.6. (10 баллов)

Двое друзей, каждый со своей позиции, ведут наблюдение через вертикальную щель в круглую комнату.

Определить величину щели, если вместе они контролируют только четвертую часть стены комнаты, и при этом угол зрения одного и второго равны соответственно °10 и °20 градусов. При решении считать, что каждый из них видит свой участок стены.

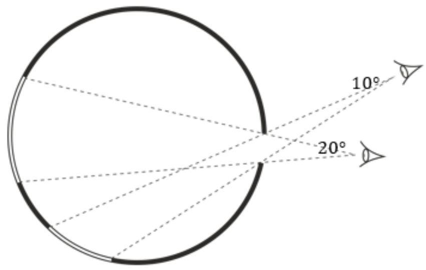

Рис. I.2.7: Схема задачи

Решение

Дополним схему задачи следующими обозначениями, как показано на рисунке. Общую дугу окружности - щель обозначим символом m, а дуги, показывающие сектора обзора, обозначим через n_1 и n_2. Углы обозначающие сектора обзора назовём $\angle A$ и $\angle B$ соответственно.

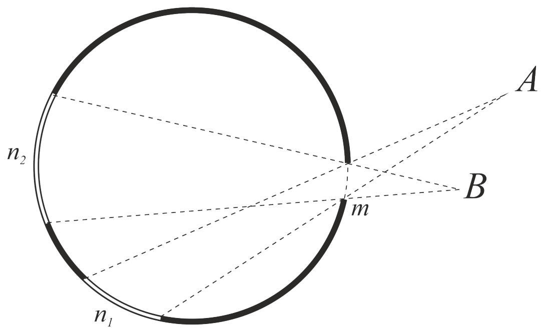

Рис. I.2.8: Схема задачи

Известно, что угол $\angle A$ между секущими, пересекающимися вне окружности, вычисляется по формуле: $\angle A = \frac{n_1 - m}{2}$. Аналогично, $\angle B = \frac{n_2 - m}{2}$. Также по условию задачи $n_1 + n_2 = 90°$. Тогда, складывая левые и правые части двух первых уравнений, получим выражение $\angle A + \angle B = \frac{n_1 + n_2}{2} - m$. Откуда можем найти искомую дугу $m = \frac{n_1 + n_2}{2} - \angle A - \angle B = \frac{90°}{2} - 10° - 20° = 15°$.

Ответ: $^\circ 15$.

Задача I.2.4.7. (10 баллов)

Каркасный бассейн в форме цилиндра высотой 1.4 метра и внутренним диаметром 3 метра стоит в помещении площадью 24 квадратных метра. Рассчитайте высоту порога при входе в помещение (в см), который необходимо соорудить строителям, чтобы в случае порыва стенок бассейна вода не перетекла через него в смежные помещения.

При расчетах учитывайте, что бассейн наполняется водой до уровня 20 см от верхней кромки.

Решение

Первым шагом рассчитаем объем воды, который находится в бассейне.

$V = \pi R^2(h - \triangle h) = \pi(\frac{3}{2})^2(1.4 - 0.2) \approx 8.48$ куб. метров

Чтобы найти уровень воды L, который получится в помещении в случае порыва бассейна, необходимо разделить полученный объем на площадь помещения $L = V/S \approx 8.48/24 \approx 0.35$ метра, т.е. строителям необходимо оборудовать порог не менее 35 см высотой.

Ответ: 35,3429173529.

Задача I.2.4.8. (10 баллов)

Студия дизайна решила сделать оригинальный сувенир – вазу в виде шара с отсеченным сверху шаровым сегментом. Внутри полость вазы имеет форму перевернутого вверх основанием прямого конуса объемом 1 литр.

Найдите диаметр горлышка вазы, если по задумке дизайнеров объем полости вазы должен был быть максимально возможным.

Введите ответ в дециметрах.

Решение

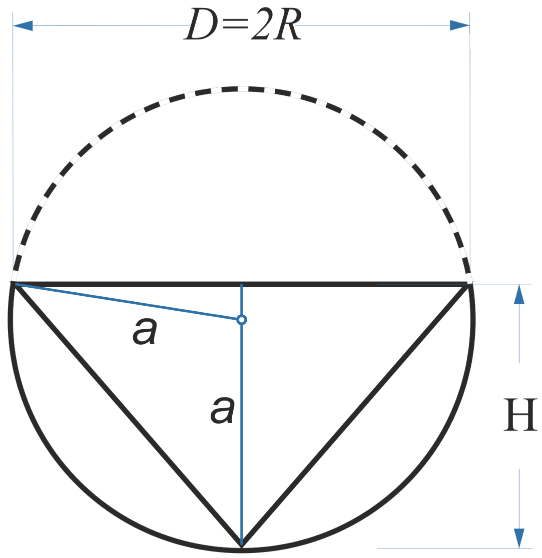

Рис. I.2.9: Проекция вазы на осевую плоскость

Обозначим радиус сферы буквой a, а радиус основания и высоту конуса R и H соответственно. Из рисунка найдём, что радиус горлышка зависит от высоты конуса и радиуса шара. Эта зависимость выражается уравнением $R^2 = a^2 - (H - a)^2$. Тогда выражение для объема конуса в зависимости от высоты и радиуса шара будет иметь вид: $V = \frac{1}{3}\pi(a^2 - (H - a)^2)H$.

Из условия задачи следует, что объем конуса выбран максимальным из тех, которые могут быть вписаны в шар заданного радиуса. Условием максимума объема будет равенство нулю производной от объема по высоте конуса:

$$V(H)^{'} = (\frac{1}{3}\pi(a^2 - (H-a)^2)H)^{'} = 0$$

$$a^2 - (H-a)^2 - 2H(H-a) = 0$$

Откуда получим соотношение между высотой конуса и радиусом шара $H = \frac{4}{3}a$. Подставим полученные соотношения для высоты и радиуса основания конуса в формулу для объема и найдем радиус шара $a = \frac{81}{32}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Для диаметра горлышка тогда имеем следующее выражение

$$D = 2R = \frac{4\sqrt{2}}{3}a = \frac{27\sqrt{2}}{8}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \approx 32.6$$

Ответ: 1,75461615531.

Задача I.2.4.9. (10 баллов)

Составляя расписание мастер-классов для финала олимпиалы НТИ по профилю "Разработка приложений виртуальной и дополненной реальности"организаторы столкнулись с затруднением. Мастер-классы должны проводится 1 раз в день с понедельника по четверг, но приглашенные специалисты имеют ряд требований к дню проведения мастер-класса. Предложите варианты расписания мастер-классов, если:

а) специалист по математическому моделированию может провести провести мастер-класс в понедельник, вторник или среду;

б) специалист по 3D моделированию может пообщаться с финалистами или в понедельник, или во вторник;

в) мастер-класс по физике может состояться во вторник или четверг;

г) мастер-класс по программированию интерактивного окружения - только во вторник или среду.

Сколько возможно вариантов составления расписания мастер-классов для проведения финала? Укажите их, перечисляя через точку с запятой мастер-классы в порядке их следования в течение финала. Например: Вариант 1. Математическое моделирование; 3D моделирование; программирование интерактивного окружения; физика.

Решение

Построим граф, вершины которого - возможные дни недели (1, 2, 3, 4) и мастер-классы (м, ф, п, 3d). Ребрами соединим мастер-классы с возможными днями проведения(рис. I.2.10).

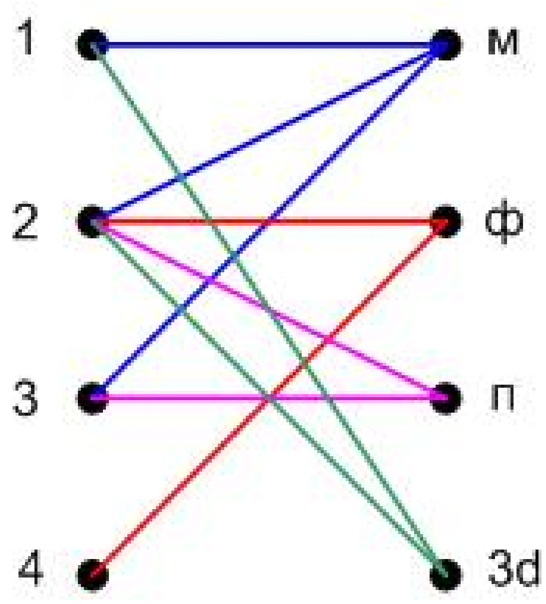

Рис. I.2.10: Граф вариантов расписания

Задача сводится к определению ребер, задающих взаимно однозначное соответствие между множеством дней и множеством мастер-классов.

Из рисунка можно увидеть, что всего количество таких соответствий $k = 3$

Приведем варианты расписания. Из графа видно, что в четверг может быть только физика. Все могут провести мастер-класс во вторник, а в понедельник и в среду согласны поработать вдое специалистов. Если математическое моделирование поставить в понедельник, то во вторник можно провести только 3D моделирование, в противном случае в среду мастер-класс поставить невозможно.

Ответ: 1234, 2134, 2314.

Задача I.2.4.10. (10 баллов)

При каких значениях параметра a функция

$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + (a+2)x^2 + (a^2 + 4a - 12)x - 24$ имеет экстремальные точки, принадлежащие промежутку $[-2, 9]$?

Найдите минимальное допустимое значение параметра a, при котором a соответствует условию.

Решение

$g'(x) = x^2 + 2(a+2)x + a^2 + 4a - 12.$

Находим критические точки: $g'(x) = 0$, $x^2 + 2(a+2)x + a^2 + 4a - 12 = 0$

$D_1 = (a+2)^2 - (a^2 + 4a - 12) = 16$, $\sqrt{D_1} = 4.$

$x_1 = -a - 6$; $x_2 = -a + 2$; x_1, x_2- точки экстремума.

По условию

$$\begin{cases} -a - 6 \geqslant -2, \\ -a + 2 \leqslant 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leqslant -4, \\ a \geqslant -7. \end{cases}$$

Таким образом, $-7 \leqslant a \leqslant -4$.

Ответ: -7.