Заключительный этап

Заключительный этап олимпиады состоит из двух частей: индивидуальное решение задач по предметам (математика, информатика) и командное решение задачи на создание прототипа программного обеспечения.

Индивидульный предметный тур

На индивидуальное решение задач дается по 2 часа на один предмет. Для каждой из параллелей (9 класс или 10-11 класс) предлагается свой набор задач по математике, задачи по информатике - общие для всех участников.

Решение каждой задачи по математике дает определенное количество баллов (см. критерии оценки). При этом некоторые задачи делятся на подзадачи. За каждую подзадачу можно получить от 0 до указанного количества баллов.

Решение задач по информатике предполагало написание программ. Ограничения по используемым языкам программирования не было. Проверочные тесты для каждой задачи по информатике делились на несколько групп. Прохождение всех тестов в группе тестов дает определенное количество баллов за решение задачи.

Участники получают оценку за решение задач в совокупности по всем предметам данного профиля (математика и информатика) — суммарно от 0 до 200 баллов:

- **Математика 9 класс** количество набранных баллов (от 0 до 100);
- **Математика 10-11 класс** количество набранных баллов (от 0 до 100);
- **Информатика** количество набранных баллов (от 0 до 300) делится на коэффициент 3.

Математика. 8-9 класс

Задача III.1.1.1. (20 баллов)

(a) Приведите пример натурального числа, которое можно записать как в виде произведения трех натуральных чисел, так и в виде суммы тех же натуральных чисел.

(b) Докажите, что любое составное число можно записать как в виде произведения нескольких (хотя бы двух) натуральных чисел, так и в виде суммы тех же натуральных чисел.

Решение

(a) Например, $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$.

(b) Представим составное число n в виде ab, где a, $b > 1$. Без ограничения общности будем считать, что $a \leqslant b$, тогда $a + b \leqslant 2b \leqslant ab = n$. Значит, можно

записать n в виде
$$n = a + b + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-a-b} = a \cdot b \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-a-b},$$
что и требовалось.

Дополнительные критерии оценки

За пункт **(a)** — 10 баллов, за пункт **(b)** — 10 баллов.

Задача III.1.1.2. (30 баллов)

С парой вещественных чисел a, b, такой, что $ab \neq 1$, проделывается следующая операция:
$$a \odot b = \frac{a + b - 2ab}{1 - ab}.$$

(a) Докажите, что если числа a и b лежат в интервале $(0;1)$, то и число $a \odot b$ лежит в нем.

(b) Докажите, что операция $\odot$ ассоциативна, т.е. что $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.

Решение

(a) Сначала докажем, что $a \odot b > 0$. Ясно, что $1 - ab > 0$. Пусть $a \leqslant b$. Тогда $a + b - 2ab \geqslant 2a - 2ab = 2a(1 - b) > 0$. Значит, $\frac{a+b-2ab}{1-ab} > 0$.

Теперь докажем, что $a \odot b < 1$. Учитывая, что знаменатель дроби $a \odot b$ положителен, домножим на него наше неравенство и полчим равносильное неравенство $a + b - 2ab < 1 - ab$, которое преобразуется в верное неравенство $(1 - a)(1 - b) > 0$. Значит, $a \odot b < 1$, и наше утверждение доказано.

(b) Утверждение этого пункта можно доказать непосредственными вычислениями, однако можно поступить хитрее. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$. Докажем, что $f(a \odot b) = f(a) + f(b)$. В самом деле,
$$f(a \odot b) = \frac{1}{1 - \frac{a+b-2ab}{1-ab}} - 1 = \frac{1 - ab}{1 - a - b + ab} - 1 = \frac{1 - ab}{(1 - a)(1 - b)} - 1 =$$
$$= \left(\frac{1}{1 - a} - 1\right) + \left(\frac{1}{1 - b} - 1\right) = f(a) + f(b).$$

Таким образом,
$$f((a \odot b) \odot c) = f(a \odot b) + f(c) = f(a) + f(b) + f(c) = f(a) + f(b \odot c) = f(a \odot (b \odot c)).$$

Т.к. функция f инъективна, отсюда следует, что $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$, что и требовалось доказать.

Дополнительные критерии оценки

За пункт **(a)** — 10 баллов, за пункт **(b)** — 20 баллов.

Задача III.1.1.3. (50 баллов)

В колоде $2^n - 1$ карт ($n > 1$). Ее тасуют следующим образом. Колода делится на две стопки: в первой берутся верхние 2^{n-1} карт, а во второй — нижние $2^{n-1} - 1$. Далее карты из двух стопок смешиваются следующим образом: i-я карта второй стопки кладется между i-й и $(i + 1)$-й картами первой стопки (т.е. первая карта второй стопки кладется мжду первой и второй картами первой стопки, вторая карта — между второй и третьей, и т.д.; см. рис. **??**).

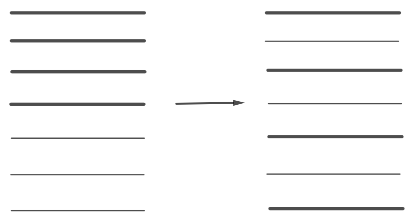

Рис. III.1.1: Перемешивание карт в колоде

(a) Докажите, что через несколько таких операций колода придёт в первоначальное положение.

(b) Найти наименьшее количество операций, при совершении которых колода придёт в первоначальное положение.

Решение

(a) Будем тасовать карты, применяя нашу операцию. Заметим, что количество возможных положений карт конечно, поэтому найдется такое положение карт, которое мы получим дважды (и тем самым возникнет цикл). Но каждое новое положение карт одноначно определяется исходным положением, поэтому мы не сможем получить из двух разных положений карт одно новое. Значит, наш цикл начинается с исхоного положения карт, что и требовалось доказать.

(b) Занумеруем позиции всех карт в изначальной расстановке, начиная с 0: 0, 1, 2, ..., $2^n - 1$. Заметим, что карта с номером $k \leqslant 2^{n-1} - 1$ при совершении нашей операции перейдет в карту с номером $2k$, а карта с номером $\ell \geqslant 2^{n-1}$ перейдет в карту с номером $2\ell - (2^n - 1)$. Дальше можно рассуждать по-разному.

<u>Способ 1.</u> Запишем номер карты в двоичной системе счисления с помощью n цифр (при необходимости добавив в начало нули): $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Докажем, что наше операция меняет двоичный номер карты следующим образом:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \to \overline{a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_n}$$

(т.е. первяа цифра переставляется в конец). В самом деле, если $a_n = 0$, то число умножается на 2, т.е. справа к нему приписывается $0 = a_n$:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = \overline{a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \to \overline{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 0} = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 a_n}.$$

Если же $a_n = 1$, то двоичная запись изеняется следующим образом:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = \overline{1 a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \to \overline{1 a_{n-1} \ldots a_1 a_0 0} - \overline{10 \ldots 00} + 1 =$$
$$= \overline{a_{n-1} \ldots a_1 a_0 1} = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 a_n}.$$

И в том, и в другом случае первая цифра в двоичной записи смещается в конец числа.

Таким образом, ясно, что для того, чтобы номер каждой карты стал прежним, достаточно n операций (поскольку двоичная запись состоит из n цифр). С другой стороны, число $1 \ldots 00$ невозможно сделать прежним за меньшее число операций (т.к. единица должна послеовательно пройти по всем позициям, которых ровно n).

Способ 2. Обозначим через $f(k)$ номер, на который перейдет карта с номером k. Тогда $f(k) \equiv 2k \pmod{2^n - 1}$. Значит, применяя операцию f s раз, карта, стоящая на номере k, будет стоять на номере $f^{(s)}(k) \equiv 2^s k \pmod{2^n - 1}$. Пусть s — наименьшее число, такое, что все карты вернулись на исходные места. Тогда $2^s k \equiv k \pmod{2^n - 1}$ для всех $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 2$.

Заметим, что при $s = n$ это сравнение верно, и все карточки вернутся на свои мста. С другой стороны, при $s < n$ это сравнение неверно для числа $k = 1$, т.к. $2^s - 1 < 2^n - 1$. Поэтому минимальное количество операций равно n.

Дополнительные критерии оценки

За пункт **(a)** — 20 баллов, за пункт **(b)** — 30 баллов.

В пункте **(a)** доказано, что возникает цикл, но н доказано отсутствие предпериода — 10 баллов.

В пункте **(b)** верно выписаны номера всех карт после перетасовки — 10 баллов.

В пункте **(b)** показано, что существует карта, которая возвращается на исходную позицию не менее, чем за n ходов — 15 баллов.