Заключительный этап

Заключительный этап олимпиады состоит из двух частей: индивидуальное решение задач по предметам (математика, информатика) и командное решение задачи на создание прототипа программного обеспечения.

Индивидульный предметный тур

На индивидуальное решение задач дается по 2 часа на один предмет. Для каждой из параллелей (9 класс или 10-11 класс) предлагается свой набор задач по математике, задачи по информатике - общие для всех участников.

Решение каждой задачи по математике дает определенное количество баллов (см. критерии оценки). При этом некоторые задачи делятся на подзадачи. За каждую подзадачу можно получить от 0 до указанного количества баллов.

Решение задач по информатике предполагало написание программ. Ограничения по используемым языкам программирования не было. Проверочные тесты для каждой задачи по информатике делились на несколько групп. Прохождение всех тестов в группе тестов дает определенное количество баллов за решение задачи.

Участники получают оценку за решение задач в совокупности по всем предметам данного профиля (математика и информатика) — суммарно от 0 до 200 баллов:

- **Математика 9 класс** количество набранных баллов (от 0 до 100);
- **Математика 10-11 класс** количество набранных баллов (от 0 до 100);
- **Информатика** количество набранных баллов (от 0 до 300) делится на коэффициент 3.

–

Математика. 10-11 класс

Задача III.1.2.1. (20 баллов)

(a) Приведите пример натурального числа, которое можно записать как в виде произведения трех натуральных чисел, так и в виде суммы тех же натуральных чисел.

(b) Найдите все натуральные числа, которые можно записать как в виде произведения нескольких (хотя бы двух) натуральных чисел, так и в виде суммы тех же натуральных чисел.

Решение

(a) Например, $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$.

(b) Заметим, что $n = 1$ и простые n не подходят: случай $n = 1$ очевиден, а для простого n существуют представления в виде проиедения натуральных только вида $n \cdot 1 \ldots \cdot 1$. Но тогда сумма сомножителей не менее $n + 1$, что больше n.

Теперь докажем, что составное n удовлетворяет словию. Представим составное число n в виде ab, где a, $b > 1$. Без ограничения общности будем считать, что $a \leqslant b$, тогда $a + b \leqslant 2b \leqslant ab = n$. Значит, можно записать n в виде

$$n = a + b + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-a-b} = a \cdot b \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-a-b},$$

что и требовалось.

Дополнительные критерии оценки

За пункт **(a)** — 10 баллов, за пункт **(b)** — 10 баллов.

Задача III.1.2.2. (30 баллов)

На сторонах треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть ω_A, ω_B и ω_C — описанные окружности треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно.

(a) Докажите, что окружности ω_A, ω_B и ω_C проходят через общую точку P.

(b) Пусть прямая AP пересекает сторону BC в точке X. Докажите, что описанная окружность треугольника PA_1X касается окружности ω_A.

Решение

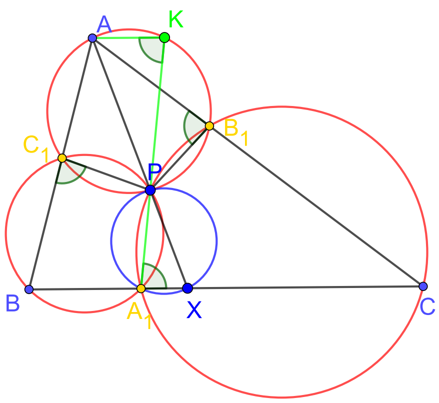

Рис. III.1.2: Пояснение к решению

(a) Используем критерий вписанного четырехугольника: четырехугольник является вписанным если и только если его внешний угол равен внутреннему не смежному с ним. Проведем окружности ω_A и ω_B, которые пересекаются в точке P, отличной от C_1. Докажем, что четырехугольник A_1CB_1P является вписанным. В самом деле, $\angle CA_1P = \angle BC_1P = \angle AB_1P$, что и требовалось.

(b) Проведем прямую A_1P, вторично пересекающую окружность ω_A в точке K. Заметим, что $\angle AKP = \angle AB_1P = \angle CA_1P$, поэтому $AK \parallel BC$. Значит, треугольники AKP и A_1PX гомотетичны с центром в P, а потому их описанные окружности касаются в точке P, что и требовалось доказать.

Дополнительные критерии оценки

За пункт **(a)** — 10 баллов, за пункт **(b)** — 20 баллов.

Задача III.1.2.3. (50 баллов)

Найти все $n \geqslant 3$, для которых правильный n-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на равнобдренные треугольники.

Решение

Рассмотрим некоторое натуральное n, удовлетворяющее условию. Пусть n четно. Заметим, что тогда каждая сторона исходного правильного n-угольника должна быть боковой стороной какого-то равнобедренного треугольника разбиения, поскольку противном случае должна существовать вершина, находящаяся на серединном перпендикуляре к этой стороне, что невозможно при четном n. Поэтому при четном n вершины n-угольника необходимо соединять диагоналями через одну. тем-самым у нас останется правильный $n/2$-угольник. Продолжая этот процесс, мы в конце концов либо придем к квадрату, который легко триангируется (что дает нам ответ $n = 2^k$), либо к нечетному n.

Будем теперь исследовать случай нечетного n. В таком случае существует сторона, которая является основанием равнобдренного треугольника разбиения. Этот трегольник делит наш n-угольник на две одинаковые части, состоящие из $\frac{n-1}{2}$ коротких сторон и одной длинной стороны (бывшей диагонали). Эти части также должны триангулироваться на равнобедренные треугольники. Ясно, что самая длинная сторона должна быть основанием равнобдренного треугольника, и этот треугольник снова делит многоугольник на две одинаковые части. При этом количество сторон у частей меняется следующим образом: $n \to \frac{n+1}{2}$. Заметим, что после каждого шага число $\frac{n+1}{2}$ также должно быть нечетным (иначе не надется равнобедренного треугольника с основанием на длинной стороне), поэтому в кончном счете мы придем просто к треугольникам. Обратный процесс увеличения сторон выглядит так: $n \to 2n - 1$. Стартуя с $n = 3 = 2^1 + 1$, мы получам $n = 2^2 + 1,\ 2^3 + 1,\ \ldots,\ 2^\ell + 1$.

Таким образом, окончательный ответ выглядит так: $n = 2^k(2^\ell + 1)$, где $k,\ \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $k,\ l$ не равны 0 одновременно.

Ответ: $n = 2^k(2^\ell + 1)$, где $k,\ \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $k,\ l$ не равны 0 одновременно.

Дополнительные критерии оценки

Показано, что если n четно, то задача сводится к числу $\frac{n}{2}$ — 5 баллов.

С помощью перехода от n к $\frac{n}{2}$ получен ответ $2 = 2^k$ и указано, что осталось разобрать случай нечетного n — 15 баллов.

Для нечетного n доказано наличие треугольника, делящего исходный n-угольник на две одинаковые части — 5 баллов.

Задача верно сведена от нечетного n к числу $\frac{n+1}{2}$ и обоснована нечетность этого числа — 15 баллов.